$$L=\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{1}{3} & 1 & \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix} \qquad A'^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

- $A'^{-1}=(PA)^{-1}=A^{-1}P^{-1} \Leftrightarrow$

$A^{-1}=A'^{-1}P.$

19-11-11.

Άσκηση: Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax=b$.

όπου $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ και $b=\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 1\end{bmatrix}$

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel και να γίνουν 4 επαναλήψεις με τη μέθοδο που συγκλίνει με $x^{(0)}=0$.

Jacobi

$$G_J=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-G_J)=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -2\\ 1 & \lambda & 1\\ 2 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+4-4+4\lambda-2\lambda-2\lambda=\lambda^3=0 \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \Rightarrow$$

$\rho(G_J)=0 \Rightarrow$ συγκλίνει με άπειρη ταχύτητα!

Gauss-Seidel

$$G_{GS}=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ & 0 & -1\\ & & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ -1 & 1 & \\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ & 0 & -1\\ & & 0\end{bmatrix} \circledast$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$x_{11}=1/1=1$

$x_{21}=(0-1\cdot 1)/1=-1$

$x_{31}=(0-2\cdot 1-2(-1))/1=0$

$x_{13}=0$

$x_{23}=0$

$x_{33}=1/1=1$

$$[(D-L)^{-1}]^T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$x_{12}=0$

$x_{22}=1/1=1$

$x_{32}=(0-2\cdot 0-2\cdot 1)/1=-2$

$\underline{⑥}$ $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \rightarrow \rho(G_{GS}) = 2 > 1 \rightarrow \underline{\text{Αποκλίνει.}} \end{array}$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) / a_{ii}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = 1 \quad\quad -2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1 - x_1^{(k)} \quad\quad - x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 1 - 2x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} \end{array}} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1-2+2 \\ 1-1-1 \\ 1-2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1-2(-1)+2(-3) \\ 1-1-(-3) \\ 1-2\cdot 1-2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1-2\cdot 3+2\cdot 1 \\ 1-(-3)-1 \\ 1-2(-3)-2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x^{(3)} = x^{(4)} \rightarrow x$ $\underline{\text{την ακριβή λύση.}}$

$$\varepsilon^{(k)} = G_J^{k} \varepsilon^{(0)}$$
$$\varepsilon^{(3)} = 0 \Leftrightarrow G_J^{3} \varepsilon^{(0)} = 0 \rightarrow G_J^{3} = 0.$$

Παράσταση πολυωνύμου-Παρεμβολής σε μορφή Lagrange

Έστω $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ διαφορετικά μεταξύ τους και οι τιμές της συνάρτησης f, $f(x_i)$, $i = 0,1,2\dots n$. Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_n$ της f στα σημεία αυτά. Θεωρούμε τα πολυώνυμα $L_i(x) \in \mathbb{P}_n$ τέτοια ώστε $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, το δ-Kronecker $i = 0,1,\dots n$. Το $L_i(x)$ υπάρχει και είναι μοναδικό, από το θεώρημα ύπαρξης κ' μοναδικότητας.

Το $L_i(x)$ έχει ρίζες τα $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n$ επομένως γράφεται ως: $L_i(x) = a_i (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n) = a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x-x_j)$. Το a_i προσδιορίζεται από το $L_i(x_i) = 1 \Leftrightarrow$

$$a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j) = 1 \Leftrightarrow a_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

, Τα $L_i(x)$, $i = 0,1, n$ λέγονται πολυώνυμα Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, x_1, \dots x_n$.

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) \in P_n$. Το p είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$. Πραγματικά: $\sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, 2 \dots n$.

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής με P_3 που παρεμβάλλεται στις τιμές της συνάρτησης:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	2	0	0	8

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$$= 2\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 8\frac{(x-(-1))(x-0)(x-1)}{(2-(-1))(2-0)(2-1)} = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 2x) + \frac{4}{3}(x^3 - x) = \underline{x^3 + x^2 - 2x}$$

<u>Να αποδειχθεί ότι $P(x) = L_0(x) + L_1(x) + \dots + L_n(x) = 1$. (σπίτι)</u>